Technická univerzita v Liberci
FAKULTA PŘÍRODOVĚDNĚ-HUMANITNÍ A PEDAGOGICKÁ

Katedra: Katedra matematiky a didaktiky matematiky
Studijní program: Matematika
Studijní obor: Matematika - Informatika

Užití derivací a integrálů pro ekonomické výpočty
Using Derivatives and Integrals in Economic Calculations

Bakalářská práce: *2012*–FP–*KMD–0007*

Autor:
Hana ŘÍHOVÁ

Podpis:

Vedoucí práce: RNDr. Daniela Bittnerová, CSc.
Konzultant:

Počet

stran	grafů	obrázků	tabulek	pramenů	příloh
54	0	3	5	11	0

V Liberci dne:

Originální zadání

Čestné prohlášení

Název práce:	Užití derivací a integrálů pro ekonomické výpočty
Jméno a příjmení autora:	Hana Říhová
Osobní číslo:	P09001131

Byla jsem seznámena s tím, že na mou bakalářskou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. o právu autorském, právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, zejména § 60 – školní dílo.

Prohlašuji, že má bakalářská práce je ve smyslu autorského zákona výhradně mým autorským dílem.

Beru na vědomí, že Technická univerzita v Liberci (TUL) nezasahuje do mých autorských práv užitím mé bakalářské práce pro vnitřní potřebu TUL.

Užiji-li bakalářskou práci nebo poskytnu-li licenci k jejímu využití, jsem si vědom povinnosti informovat o této skutečnosti TUL; v tomto případě má TUL právo ode mne požadovat úhradu nákladů, které vynaložila na vytvoření díla, až do jejich skutečné výše.

Bakalářskou práci jsem vypracovala samostatně s použitím uvedené literatury a na základě konzultací s vedoucím bakalářské práce a konzultantem.

Prohlašuji, že jsem do informačního systému STAG vložila elektronickou verzi mé bakalářské práce, která je identická s tištěnou verzí předkládanou k obhajobě a uvedla jsem všechny systémem požadované informace pravdivě.

V Liberci dne: 25. 04. 2012

Hana Říhová

Poděkování

Na tomto místě bych ráda poděkovala RNDr. Daniele Bittnerové, CSc., za její pomoc při zpracování této práce a za poskytnutý čas, který mi věnovala. Také bych chtěla poděkovat mým blízkým, kteří mě v průběhu psaní této práce podporovali.

Anotace

Předmětem bakalářské práce je propojení matematiky a ekonomie. První část předkládá teorii derivací a jejich následné ekonomické využití, druhá část této práce je zaměřena na integrály, které jsou následně aplikovány na ekonomické úlohy.

Klíčová slova: derivace, integrály, ekonomické funkce

Annotation

The goal of my bachelor is to make a connection between mathematics and economics. The first part introduces the theory of derivatives and applications of derivatives in economics, the second part of the work concentrates on integrals, which are applied in economic problems then.

Key words: derivative, integral, economic functions

Obsah

Seznam tabulek

Seznam ilustrací

1 Úvod

Cílem této práce je ekonomům přiblížit matematiku a matematikům přiblížit ekonomii, protože tyto dva obory spolu úzce souvisejí.

Práce je rozdělena obsahově na dvě části:

V první části této bakalářské práce připomeneme základy teorie diferenciálního počtu funkce jedné reálné proměnné, uvedeme základní vzorce, základní pravidla a typy příkladů. Potom tyto znalosti aplikujeme na vybrané ekonomické úlohy.

V druhé části se budeme zabývat integrálním počtem funkcí jedné reálné proměnné. Ukážeme, jak základní vzorce, tak substituční metodu, metodu per partes, počítání s vlastním a neurčitým integrálem.

Na konci každé kapitoly jsou zařazeny příklady na procvičování i s výsledky.

Pro porozumění je potřebná znalost limit a počítání s nimi. Také je třeba znát základy ekonomie a matematiky na středoškolské úrovni.

Snažíme se o co nejjednodušší a přehledné vysvětlení matematického aparátu. Práce obsahuje opravdu jen to podstatné a důležité. Nejsou uvedeny důkazy, neboť ty je možné snadno najít například v knize: „*Matematika pro ekonomy 2 díl*“ od Henzlera a Kaňky.

Co se týče ekonomické části, příklady jsem hledala v ekonomických učebnicích a inspirovala se pro vytvoření vlastních úloh. V některých z nich byly příklady řešeny jiným způsobem než derivacemi a integrály, ale měla jsem dojem, že řešení pomocí derivací a integrálů je daleko jednodušší. Na druhou stranu, tam, kde příklady byly řešeny pomocí derivací a integrálů, v učebnicích chybělo vysvětlení, jak daný postup funguje.

2 Diferenciální počet funkcí jedné proměnné

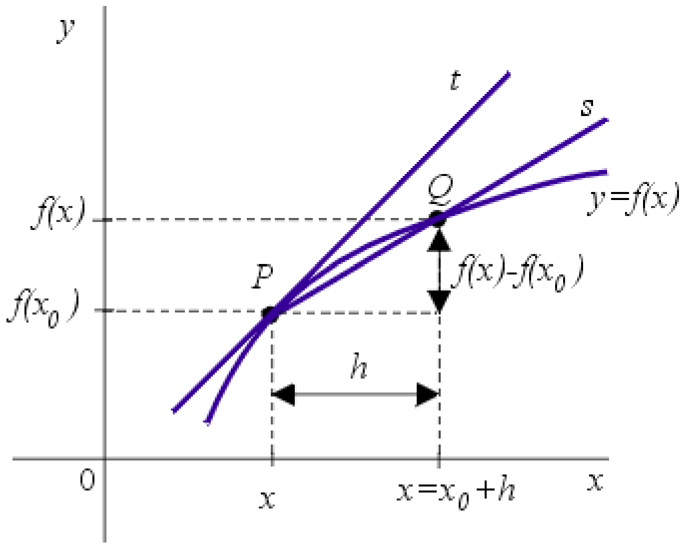
2.1 Úvod

Definice:

Nechť je definována funkce $f(x)$ na množině M, $x_0 \in M$. Nechť existuje limita

$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Tuto limitu nazýváme derivací funkce f v bodě x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.



Obr. 1: Derivace funkce f v bodě x_0 [3 s. 1]

Poznámka:

1. Pokud tato limita neexistuje, říkáme, že funkce f nemá v bodě x_0 derivaci.

2. Existují-li limity zleva i zprava, definujeme derivaci zleva či zprava.

3. Z definice plyne, že derivace vyjadřuje směrnici tečny funkce f v bodě x_0.

V tab. 1 jsou uvedeny vzorce pro derivace elementárních funkcí.

Tab. 1: Derivace elementárních funkcí [1 s. 95]

Funkce	**Derivace**	**Definiční obor**
$y=C$	$y'=0$	$x\in\mathbb{R}$
$y=x^a$	$y'=a\,x^{a-1}$	Obor mocninné funkce, $a\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{e}^x$	$y'=\mathrm{e}^x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$	$x\in\mathbb{R}$, $a>0$
$y=\ln x$	$y'=\frac{1}{x}$	$x\in(0,\infty)$
$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$	$x\in(0,\infty)$, $a>0$
$y=\sin x$	$y'=\cos x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\cos x$	$y=-\sin x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{tg}\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\mathrm{tg}^2 x$	$x\notin(2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$
$y=\mathrm{cotg}\,x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-(1+\mathrm{cotg}^2 x)$	$x\notin k\ \pi, k\in\mathbb{Z}$
$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$y=\arccos x$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$y=\mathrm{arctg}\,x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{arccotg}\,x$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\sinh x$	$y'=\cosh x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\cosh x$	$y'=\sinh x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{tgh}\,x$	$y'=\frac{1}{\cosh^2 x}=1-\mathrm{tgh}^2 x$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\mathrm{cotgh}\,x$	$y'=-\frac{1}{\sinh^2 x}=1-\mathrm{cotgh}^2 x$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,\infty)$

2.2 Pravidla pro derivování

Nechť funkce *u* a *v* mají v bodě $x \in M$ derivace $f'(x)$, $g'(x)$, potom platí:

Pravidla pro derivování součtu, rozdílu:

$$(u+v)' = u' + v'$$

$$(u-v)' = u' - v'$$

Pravidlo pro derivování součinu:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

Pravidlo pro derivování podílu:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \qquad \forall\, x \in M \text{ je } v(x) \neq 0$$

Nechť funkce $g(x)$ má derivaci v bodě x_0 a funkce $f(y)$ má derivaci v bodě $y_0 = g(x_0)$, potom platí tzv. pravidlo pro derivaci složené funkce:

$$f(g(x))' = f'(g(x_0))\, g'(x_0)$$

2.2.1 Řešené příklady

Vypočítáme derivace následujících funkcí:

1. $y = 4x^3 + x^2 - 3x$

Použijeme vzorce pro součet a rozdíl:

$y' = 3 \cdot 4x^2 + 2x - 3 = 12x^2 + 2x - 3$

2. $y = 2x \cdot \sin x$

Použijeme vzorec pro součin:

$y' = 2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x$

3. $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$

Použijeme vzorec pro podíl:

$$y'=\frac{\frac{1}{x}\cdot x^2-\ln x\cdot 2\mathrm{x}}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x\left(1-2\ln x\right)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$$

4. $y=\ln\left(3x+1\right)$

Použijeme vzorec pro složenou funkci.

Nejprve si musíme uvědomit, že $3x+1$ je vnitřní funkce a logaritmus je vnější funkce.

Zderivujeme tedy nejprve logaritmus:

$$y'=\frac{1}{\left(3x+1\right)}$$

Vynásobíme to derivací vnitřní funkce:

$$y'=\frac{1}{3x+1}\cdot 3=\frac{3}{3x+1}$$

5. $y=\cos\left(\dfrac{x^2-x}{\sin x}\right)$

Tento příklad už je komplexnější. Máme zde jak složenou funkci, tak podíl.

$$y'=-\sin\left(\frac{x^2-x}{\sin x}\right)\cdot\frac{\left(2x-1\right)\sin x-\left(x^2-x\right)\cos x}{\left(\sin x\right)^2}$$

6. $y=\mathrm{tg}\left(\mathrm{e}^x\right)\cdot 3^x$

Tuto funkci budeme derivovat podle vzorce součinu, takže nejprve zderivujeme $y=\mathrm{tg}\left(\mathrm{e}^x\right)$ podle derivace složené funkce.

Poté tuto derivaci dosadíme do součinu.

$$y=\frac{1}{\cos^2\mathrm{e}^x}\cdot 3^x\cdot e^x+\mathrm{tg}\left(\mathrm{e}^x\right)\cdot 3^x\cdot\ln 3$$

2.3 Lokální význam znaménka první derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Každá funkce *f* má svůj definiční obor (*Df*). Definiční obor je interval všech hodnot *x*, pro které má daná funkce *f* smysl.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální maximum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **lokální minimum**, jestliže existuje okolí bodu *O* bodu x_0 tak, že $\forall x \in O$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Lokální minimum a maximum se označuje jako **lokální extrém**. V případě ostré nerovnosti se nazývá ostrý lokální extrém.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální minimum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \geq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce *f* má v bodě $x_0 \in Df$ **absolutní globální maximum**, jestliže $\forall x \in Df$ je $f(x) \leq f(x_0)$.

Funkce může mít extrém pouze v bodech, kde je první derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

Nechť $f'(x_0)=0$. Je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce v tomto bodě lokální minimum, jestliže $f''(x_0) < 0,$ má funkce v tomto bodě lokální maximum.

Poznámka:

Zderivujeme-li funkci, výsledkem je obecně opět funkce. Má-li tato nová funkce derivaci, nazveme ji obecně druhou derivací původní funkce.

Nechť $O = L \cup P$, kde *L* je levé okolí *O* bodu x_0 a *P* je pravé okolí *O* bodu x_0.

Je-li $f'(x_0) > 0$, je funkce *f* v x_0 rostoucí. Je-li $f'(x_0) < 0$, je funkce *f* v x_0 klesající.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) < 0$, má funkce *f* v x_0 lokální maximum.

Je-li $\forall x \in L$ $f'(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f'(x) > 0$, má funkce *f* v x_0 lokální minimum.

2.4 Lokální význam znaménka druhé derivace

Uvedeme si základní pojmy:

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) > 0$, řekneme, že graf funkce f **leží nad tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Nechť má funkce f v bodě x_0 derivaci. Je-li $f''(x) < 0$, řekneme, že graf funkce f **leží pod tečnou** o rovnici $y - f'(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Označme L jako levé okolí bodu x_0. Je-li $\forall x \in L$ graf funkce nad tečnou a $\forall x \in P$ pod tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme P jako pravé okolí bodu x_0. Je-li $\forall x \in L$ graf funkce pod tečnou a $\forall x \in P$ nad tečnou a má-li funkce v okolí bodu x_0 spojitou derivaci, řekneme, že funkce f má v x_0 **inflexi** (inflexní bod).

Označme L levé okolí bodu x_0. Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce nad tečnou, nazývá se funkce **konvexní** v okolí bodu x_0.

Označme P pravé okolí bodu x_0. Nechť má funkce f v okolí bodu x_0 spojitou derivaci. Je-li $\forall x \in L \cup P$ graf funkce pod tečnou, nazývá se funkce **konkávní** v okolí bodu x_0.

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0. Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) > 0$, je funkce f v x_0 konvexní.

Nechť má funkce f spojitou derivaci v okolí O bodu x_0. Je-li $\forall x \in O$ $f''(x_0) < 0$, je funkce f v x_0 konkávní.

Nechť $O = L \cup P$:

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) > 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) < 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Je-li $\forall x \in L$ $f''(x) < 0$ a $\forall x \in P$ $f''(x) > 0$, má funkce f v bodě x_0 inflexi.

Funkce může mít inflexi pouze v bodech, kde je druhá derivace rovna nule, nebo kde neexistuje.

2.4.1 Řešené příklady

Nalezneme intervaly, ve kterých funkce klesá, roste, je konkávní nebo konvexní. Dále také určíme inflexní body a lokální extrémy funkce.

1. $y=\frac{1}{x^2-1}$

Nejprve určíme definiční obor:

$$D(f)=\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$$

Funkci budeme derivovat:

$$y'=\frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

Nyní zjistíme, pro které hodnoty bude tato funkce rovna nule, případně, kdy nebude definována. Tím zjistíme monotonii funkce.

Extrémy mohou být v bodech:

$$x=0\,(y'=0),\, x=\pm 1\,(y'\,\text{neexistuje}) \quad .$$

Pro přehlednost si tyto body a intervaly zapíšeme do tabulky:

Tab. 2: Monotonie funkce a lokální extrémy

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
y'	$+$		$+$		-		-
y	roste	není def.	roste	lokální max.	klesá	není def.	klesá

Libovolné číslo z intervalu dosadíme do zderivované funkce a zjistíme, zda je výsledek kladný, tudíž funkce roste, nebo jestli je záporný a funkce klesá.

Funkci opět zderivujeme, abychom zjistili, kdy je konkávní a kdy konvexní, případně zda existují inflexní body:

$$y'=\frac{-2(x^2-1)^2+2x(2(x^2-1))2x}{(x^2-1)^4}=\frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$$

Inflexní body mohou být v bodech $x=0,\, x=\pm 1$.

Zapíšeme si vše do tabulky:

Tab. 3: Konvexnost, konkávnost, inflexní body

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0
y'	+		-	
y	konvexní	není def.	konkávní	není inflexní bod

	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
y'	-		+
y	konkávní	Není def.	konvexní

Stejný postup jako u první derivace:

Vybereme si libovolné číslo z intervalu, dosadíme do druhé derivace a zjistíme, kdy je funkce kladná (konvexní) a kdy záporná (konkávní).

Z tabulky je zřejmé, že inflexní bod tato funkce nemá.

3 Ekonomické aplikace derivace

3.1 Úvod

Ekonomie se podle tradiční definice zabývá zkoumáním alokace vzácných zdrojů mezi různá alternativní užití tak, aby byly uspokojeny lidské potřeby [8 s. 17].

Hlavní tři subjekty tvoří jednotlivec, firma, stát.
Jednotlivec určuje kdy, kde a kolik si čeho koupí, firma, co se bude vyrábět, za jakou cenu a v jakém množství, a stát vytváří právní normy, v jejichž rámci ekonomická činnost probíhá.
Z činností těchto subjektů vznikají termíny spotřeba, výroba, směna.
Spotřeba je hlavním impulsem pro existenci a rozvoj výroby a směna představuje výměnu (například rohlík za peníze).
Základem zkoumání mikroekonomie je zejména zjišťování optima a hledání rovnováhy. K jejich určování nám pomáhají tzv. ekonomické modely, které znázorňují vztahy mezi vybranými proměnnými. V těchto modelech se velmi často setkáváme s derivací, která vyjadřuje, jak se změna jedné proměnné projeví ve změně jiné proměnné.
Při řešení problémů optimalizace využíváme lokálních extrémů a nulových bodů derivace potřebné funkce.
V případě analýzy tržní rovnováhy využíváme analýzu nabídky a poptávky.
Tvary ekonomických funkcí vycházejí z praxe nějakým dlouhodobým výzkumem, nebo měřením.

Při řešení ekonomických úloh se budeme zabývat následujícími funkcemi v tabulce:

Tab. 4: Ekonomické funkce [7 s. 18]

Označení	Popis
$TC(Q)$	…celkové náklady potřebné na produkci Q jednotek daného produktu
$MC(Q) = (TC)'(Q)$	...mezní náklady definované jako derivace celkových nákladů podle proměnné Q
$AC(Q)$	...průměrné náklady potřebné na produkci jednoho výrobku
$TR(Q)$	...celkový příjem daný prodejem Q jednotek daného produktu
$MR(Q) = (TR)'(Q)$	...mezní příjem definovaný jako derivace celkového příjmu podle proměnné Q
$\Pi(Q)$	...celkový zisk daný prodejem Q jednotek daného produktu $\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$
$TU(Q)$	...užitková funkce daná spotřebou Q jednotek daného statku
$MU(Q)$	...uvažujeme-li spotřebu pouze jednoho druhu statku, je funkce mezního užitku první derivací celkového užitku
$D(p)$	...poptávková funkce (vyjadřuje množství zboží, které spotřebitel zamýšlí koupit při dané ceně)
$D'(p)$	…mezní poptávka (derivace funkce D podle proměnné p)
$\delta(Q)$	…cenová funkce (inverzní funkce k funkci $D(p)$)

3.2 Mezní náklady

Mezní náklady jsou definovány jako změna celkových nákladů firmy vyvolané změnou objemu výstupu o jednotku.
Lze je vyjádřit jako derivaci celkových nákladů podle proměnné Q :

$$MC(Q)=(TC)'(Q)$$

Příklad:
Znáte-li funkci celkových nákladů $TC(Q)=1000+5Q^2$, zjistěte, jak velké budou mezní náklady při výrobě 50 jednotek.

Řešení:
$TC(Q)=1000+5Q^2$

Pro Q = 50 stanovme funkci mezních nákladu $MC(Q)$:

$$MC(Q)=(TC)'(Q)$$

$$MC(Q)=(1000+5Q^2)'$$

$$MC(Q)=10Q$$

Dosadíme Q = 50 dle zadání:

$$MC(Q)=500$$

Mezní náklady jsou 500 jednotek.

3.3 Mezní příjem

Mezní příjem je definován jako změna celkového přijmu firmy, která je důsledkem změny produkce o jednotku (Q).
Lze je vyjádřit jako derivaci celkových příjmů podle proměnné Q :

$$MR(Q) = (TR)'(Q)$$

Příklad:

Znáte-li funkci celkových příjmů $TR(Q) = 4Q^2 - 3Q$, zjistěte, jak velký bude mezní příjem při výrobě 50 jednotek.

Řešení:

$$MR(Q) = (TR)'(Q)$$

$$MR(Q) = (4Q^2 - 3Q)'$$
$$MR(Q) = 8Q - 3$$

Dosadíme Q = 50 dle zadání:

$$MR(Q) = 8 \cdot 50 - 3 = 397$$

Mezní příjem je 397 jednotek.

3.4 Cenová elasticita poptávky

Cenová elasticita poptávky je jedna z důležitých vlastností poptávky.

Vyjadřuje citlivost poptávky na ceně, umožní rozlišit situace, kdy zvýšení ceny zvýší tržby a kdy sníží tržby.

Pro výpočet použijeme jednoduché vzorce derivace.

Zavedený ekonomický postup:

Koeficient cenové elasticity poptávky lze také vypočítat jako podíl procentní změny poptávaného množství a procentní změny ceny:

$$E_D(p) = -\frac{\frac{\Delta D(p)}{D(p)}}{\frac{\Delta p}{p}}$$

Vzorec pro případ spojité funkce:

$$E_D(p) = -\frac{dD(p)}{dp} \cdot \frac{p}{D(p)}$$

Příklad:

Je dán vzorec pro poptávku zboží $D(p) = \frac{250}{10\mathrm{p}+40}$ a pro mezní poptávku $D'(p)$.

Jak vypočítáme elasticitu poptávky?

Řešení:

$$D'(p) = -\frac{250 \cdot 10}{(10\mathrm{p}+40)^2}$$

Elasticita poptávky:

$$E_D(p) = \frac{250 \cdot 10}{(10\mathrm{p}+40)^2} \cdot \frac{p}{\frac{250}{(10\mathrm{p}+40)}}$$

Pro $p = 5$

$$E_D(5) = 0{,}56$$

Elasticita poptávky je rovna hodnotě 0,56.

3.5 Maximální zisk firmy

Zisková funkce je rozdíl mezi celkovými příjmy a celkovými náklady.

Maximální zisk firmy

Pro výpočet maximálního zisku budeme využívat význam první derivace pro průběh funkce. Určíme si, na kterém intervalu je funkce rostoucí a na kterém klesající, a nalezneme maximum.

Příklad:

Spočítejme, kdy bude mít firma maximální zisk, pokud její měsíční tržby *TR*(*Q*) a měsíční výdaje *TC*(*Q*) jsou dány rovnostmi:

$$TR(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q$$

$$TC(Q) = -120Q^2 + 1000$$

Řešení:

$$\Pi(Q) = TR(Q) - TC(Q)$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 - 105Q^2 + 3600Q + 120Q^2 - 1000$$

$$\Pi(Q) = -Q^3 + 15Q^2 + 3600Q - 1000$$

$$\Pi'(Q) = -3Q^2 + 30Q + 3600$$

$$\Pi'(Q) = -3(Q-40)(Q+30)$$

Nalezneme nulové body:

$$Q = 40, Q = -30$$

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Rozdělíme funkci na dva intervaly:

$(-\infty, 40\rangle$

$\langle 40, \infty)$

Zjistíme, kdy funkce roste a kdy klesá. Dosadíme libovolné číslo z intervalu do rovnice první derivace.

Pro první interval použijeme číslo 0 :

$$\Pi'(Q) = -3(0-40)(0+30) = 3600$$

Výsledek je kladný, na tomto intervalu funkce roste.

Pro druhý interval použijeme číslo 100 :

$$\Pi(Q) = -3(100-40)(100+30) = -23400$$

Výsledek je záporný, na tomto intervalu funkce klesá.

Maximální zisk bude pro $Q = 40$.

Příklad 2:

Jaká je optimální rychlost vozidla, jestliže chceme co nejvíce ušetřit pohonné hmoty.

Jestliže závislost spotřeby na rychlosti je dána funkcí $F(x) = 0{,}01\,x - 0{,}0003\,x^2$.

Poznámka: Záporné hodnoty nemají smysl.

Řešení:

$$F'(x) = 0{,}01 - 0{,}0003 \cdot 2\mathrm{x}$$

Nalezneme nulové body:

$$\begin{aligned} 0{,}01 - 0{,}0006\,x &= 0 \\ 0{,}0006\,x &= 0{,}01 \\ x &= \frac{0{,}01}{0{,}0006} \end{aligned}$$

$$x = 16{,}7$$

Optimální rychlost vozidla je 16,7 kilometrů za hodinu.

3.6 Makroekonomie

Makroekonomické modely pracují s veličinami [11 s. 25]:

a) důchod a produkce Y

b) spotřeba C a úspory S

c) investice

Je-li $C = C(Y)$ **spotřební funkce**, pak $\frac{dC}{dY} = C'(Y)$ vyjadřuje tzv. **mezní sklon ke spotřebě**. Protože $Y = C + S$, platí $S = Y - C(Y)$. Derivace $\frac{dS}{dY} = 1 - dC\frac{(y)}{dY}$ se nazývá **mezním sklonem k úsporám**.

V makroekonomii existuje podmínka makroekonomické rovnováhy $Y = C + I$. Odtud:

$$Y - C(Y) = I ,$$

protože potřeba je závislá na důchodu.

Derivace vztahu $Y - C(Y) = I$ podle I vyjadřuje změnu v rovnovážné úrovni důchodu v závislosti na změně hodnoty investice I:

$$\frac{dY}{dI} - \frac{dC}{dY} \cdot \frac{dY}{dI} = 1$$

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ je $\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - \frac{dC}{dY}}$.

Pro rostoucí funkce důchodu C, S je $C'(Y) = c > 0, S'(Y) = s > 0$.

Je-li $C = c_0 + cY$ spotřební funkce, kde c je mezní sklon ke spotřebě, pak pro $c \neq 1$ je $\frac{dY}{dI} = \frac{1}{1 - c}$.

Pro $C = c_0 + c_1 Y + c_2 Y^2$, kde $c_1 > 0, c_2 > 0,$ je mezní sklon ke spotřebě vyjádřen vztahem $c(Y) = C'(Y) = c_1 + 2 c_2 Y$.

Pak platí:

Pro $\frac{dC}{dY} \neq 1$ dostaneme z rovnice $\frac{dY}{dI}(1-\frac{dC}{dY})=1$ vztah

$$\frac{dY}{dI}=\frac{1}{1-\frac{dC}{dY}}=\frac{1}{1-c_1-2c_2 Y}\ .$$

Ekonomické modely jsou často tvořeny na základě dlouhodobých pozorování a výzkumů. Při dlouhodobém růstu je **důchod** považován za veličinu závislou na čase $Y=Y(t)$.

Poměr $r(t)=\frac{Y'(t)}{Y(t)}$ se nazývá **tempem růstu důchodu** v čase t .

Nechť $Y(t)=Y_0 e^{\alpha t}$, α = konst.

Pak $Y'(t)=Y_0\ \alpha e^{\alpha t}, \frac{Y'(t)}{Y(t)}, r(t)=\alpha.$

Tato situace vyjadřuje **stacionární růst důchodu**.

Existují ekonomické modely, které předpokládají, že důchod Y a zaměstnanost L je ve vztahu $Y=AL^{\beta}$, kde A a β jsou konstanty. Pak je **produktivita práce** definována jako podíl $\frac{Y}{L}$ a **mezní produktivita** jako derivace $Y'(t)=\frac{dY}{dL}=A\ \beta L^{\beta-1}$.

Příklad:

Jaké je tempo růstu důchodu *r*(*t*) pro $t=50$, jestliže je důchod dán funkcí $Y(t)=t^3-2t+50$?

Řešení:

$$r(t)=\frac{Y'(t)}{Y(t)}$$

$$r(t)=\frac{3t^2-2}{t^3-2t+50}$$

Dosadíme za *t:*

$$r(t)=\frac{3\cdot 50^2-2}{50^3-2\cdot 50+50}$$

$$r(t)=3$$

Tempo růstu důchodu je rovno 3.

3.7 Procvičování

1) Celkové náklady na výrobu Q jednotek jsou dány funkcí $TC(Q) = 23Q^2 + \ln(Q+15)$. Stanovte funkci mezních nákladů $MC(Q)$. Vyřešte pro $Q = 9$.

2) Celkový příjem daný prodejem Q jednotek daného produktu je definován vzorcem $TR(Q) = \sqrt{350Q} + Q^3$. Určete mezní příjem $MR(Q)$. Vyřešte pro $Q = 4$.

3) Celkový užitek daný spotřebou Q jednotek daného statku je definován vzorce $TU(Q) = \sqrt{\frac{6Q}{8Q+10}}$. Určete mezní užitek $MU(Q)$ pro $Q = 3$. (Platí pouze v případě pouze jednoho druhu statku).

4) Celkový poptávka je dána funkcí $D(p) = \frac{100}{2p+14}$. Určete elasticitu poptávky pro $p = 5$.

5) Celkový zisk daný prodejem Q jednotek daného produktu je definován vzorcem $\Pi(Q) = (-Q)^2 + 3Q - 7$. Spočítejte, kdy bude mít firma maximální zisk.

Výsledky:

1) $MC = 414$

2) $MR = 48$

3) $MU = 0{,}364$

4) $E_D = \frac{1}{1200}$

5) $Q = \frac{3}{2}$

4 Integrální počet funkcí jedné reálné proměnné

4.1 Základní vzorce

Definice [2 s. 7]:

Nechť *f, F* jsou funkce definované v intervalu *I*. Funkce *F* se nazývá primitivní funkcí k funkci *f*, je-li:

$$\forall x \in I \; F'(x) = f(x).$$

Příklad:

$\forall x \in \mathbb{R}$ je funkce $F(x) = \sin x$ primitivní funkcí k funkci $f(x) = \cos x$, protože $(\sin x)' = \cos x$.

Poznámka: Primitivní funkce k funkci cos *x* není určena jednoznačně, ale liší se o tzv. aditivní konstantu (platí to obecně, nejen pro sin *x* a cos *x*).

Ukázka:

$(\sin x)' = \cos x, \; (\sin x + 5)' = \cos x, \; (\sin x - 30)' = \cos x$.

Definice (neurčitý integrál) [2 s. 8]:

Nechť funkce *f* má v intervalu *I* primitivní funkci *F*. Množinu všech primitivních funkcí k funkci *f* v intervalu *I* nazýváme neurčitým integrálem funkce *f* v intervalu *I* a značíme:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \forall x \in I, C \in \mathbb{R}.$$

Číslo *C* se nazývá integrační konstantou.

Poznámka: Pro spojitou funkci v intervalu *I* existuje primitivní funkce v tomto intervalu.

Věta (linearita integrování):

Existují-li v určitém intervalu neurčité integrály dvou funkcí f_1, f_2 a jsou-li $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, existuje i integrál lineární kombinace a platí:

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,\mathrm{d}x = c_1 \int f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dále uvádíme tabulku základních integrálů (Tab 5.). Známe-li dobře základní vzorce pro derivování, nebude pro nás problém zapamatovat si některé tyto funkce.

Tab. 5: Základní integrály

Funkce	**Integrál**	**Definiční obor**
$y=0$	$\int 0\,\mathrm{d}x=C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=1$	$\int 1\,\mathrm{d}x=x+C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=x^n$	$\int x^n\,\mathrm{d}x=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	$x\in\mathbb{R},\, n\in\mathbb{N}$
$y=x^s$	$\int x^s\,\mathrm{d}x=\frac{x^{s+1}}{s+1}+C$	$s,\, x\in\mathbb{R},\, x>0, s\neq -1$
$y=\frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	$x\in\mathbb{R},\, x\neq 0$
$y=\mathrm{e}^x$	$\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=a^x$	$\int a^x\mathrm{d}x=\frac{a^x}{\ln a}+C$	$x,\, a\in\mathbb{R},\, a>0, a\neq 1$
$y=\sin x$	$\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\cos x$	$\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\mathrm{tg}\,x+C$	$x\in\mathbb{R},\, k\in\mathbb{Z},\, x\neq(2\mathrm{k}+1)\frac{\pi}{2}$
$y=\frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\mathrm{cotg}\,x+C$	$x\in\mathbb{R},\, x\neq k\ \pi, k\in\mathbb{Z}$
$y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$	$x\in\mathbb{R},\, x\in(-1,1)$
$y=\frac{1}{x^2+1}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}=\mathrm{arctg}\,x+C$	$x\in\mathbb{R}$
$y=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert+C$	$a,\, x\in\mathbb{R},\, a\neq 0$
$y=\frac{1}{x^2+a^2}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{a}+C$	$a,\, x\in\mathbb{R},\, a\neq 0$
$y=\frac{1}{x^2-a^2}$	$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$	$a,\, x\in\mathbb{R},\, a\neq 0, x\neq\pm a$
$y=\frac{f'(x)}{f'x}$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x=\ln\lvert f(x)\rvert+C$	$x\in I,\, f(x)\neq 0$

4.1.1 Řešené příklady na základní vzorce

Vyřešíme následující integrály:

1. $\int (3x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x$

Podle věty linearity můžeme tento integrál rozložit na tři integrály:

$$\int 3x^2\,\mathrm{d}x - \int 4x\,\mathrm{d}x + \int 5\,\mathrm{d}x$$

Tyto integrály už můžeme jednoduše zintegrovat pomocí vzorce pro integraci x :

$$3\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 5x + C = x^3 - 2x^2 + 5\mathrm{x} + C$$

Nesmíme zapomenout na integrační konstantu.

2. $\int \frac{(3-x)}{x}\,\mathrm{d}x$

Nejprve si tuto funkci upravíme tak, že si zlomek rozdělíme na dva zlomky:

$$\int \left(\frac{3}{x} - \frac{x}{x}\right)\mathrm{d}x$$

Upravíme a rozdělíme na dva integrály:

$$\int \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x$$

Zintegrujeme dle vzorců a dostaneme výsledek:

$$3\ln|x| - x + C$$

3. $\int \frac{12x^3 + 4x}{3x^4 + 2x^2 - 7}\,\mathrm{d}x$

Pokud se na tento příklad podíváme pozorněji, všimneme si, že v čitateli je derivace jmenovatele. Můžeme použít poslední vzorec z tab 5.

Výsledkem tedy bude přirozený logaritmus čitatele, respektive derivace jmenovatele:

$$\ln|3x^4 + 2x^2 - 7| + C$$

4.2 Substituční metoda

Věta 1 (o substituci) [2 s. 20]**:**

Předpokládejme, že f je spojitá funkce v intervalu I $\forall x \in I$, je

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Nechť funkce g má v intervalu J derivaci g', $g(t) \in I, \forall t \in J$. Pak v J existuje integrál $\int f[g(t)]g'(t)dt$ a platí:

$$\int f[g(t)]g'(t)dt = \int f(x)dx = F[g(t)]dt.$$

Tento integrál dostaneme z původního integrálu pomocí substituce $x = g(t)$.

Vyjádříme si ještě vztah mezi diferenciály dx a dt. Substituci zderivujeme podle t (obě strany).

$$x = g(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = g'(t)$$
$$\mathrm{d}x = g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Schéma použití:

$$\int f[g(t)]g'(t)dt = |g(t) = x, g'(t)dt = dx|$$

$$\int f(x)dx = F(x) + C = F[g(t)] + C = G(t) + C$$

Věta 2 (o substituci) [2 s. 21]**:**

Předpokládejme, že f je spojitá funkce v intervalu I a $\forall t \in J$ existuje integrál $\int f[g(t)]g'(t)\mathrm{d}t = G(t) + C$. Nechť funkce g má v intervalu J nenulovou spojitou derivaci g' a $g(t) \in I \, \forall t \in J$. Pak v I existuje inverzní funkce $g_{-1}(x)$ k funkci $g(t)$ a integrál $\int f(x)\mathrm{d}x, \forall x \in I$ platí:

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int f[g(t)]g'(t)\mathrm{d}t = G[g_{-1}(x)].$$

4.2.1 Přehled jednoduchých substitucí

Protože ne vždy je úplně lehké ze zadání určit jakou substituci použít, ukážeme si několik základních typů použití substituce.

1. Substituce typu $t = g(x)$, platí pro: $\int f[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x$

Příklad:

$$\int \cos x \sin x\,\mathrm{d}x$$

Za substituci si zvolíme funkci sin *x* (můžeme použít i cos *x*) $\begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}$

$$\int t\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} + C = \frac{\sin^2 x}{2} + C\,.$$

2. Substituce typu $x = g(t)$, platí pro $\int f(x)\,\mathrm{d}x$

Používáme ji v případě, že pomocí substituce převedeme integrál na funkci, jejíž integrál umíme najít a existuje inverzní funkce k funkci *g*.

Příklad:

$$\int x\sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x \quad \text{substituce} \quad \begin{matrix} x^2-4=t^2 \\ 2x\,\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t \\ x\,\mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{matrix}$$

Dosadíme:

$$\int t\cdot t\,\mathrm{d}t = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{t^3}{3} + C = \frac{(x^2-4)^3}{3} + C$$

3. Lineární substituce, platí pro: $\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x$ jako substituci použijeme $(ax+b)=t$

Příklad:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+1} \quad \text{substituce} \quad \begin{matrix} x-3=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{matrix}$$

Dosadíme:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t^2+1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg}(x-3)+C$$

4. Integrál typu $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}\,x$

Tento integrál máme mezi základními vzorci, ale ukážeme si, jak by se tyto příklady daly řešit i pomocí substituce. Výsledek bude stejný, ale ne vždy už od pohledu vidíme, že čitatel je derivací jmenovatele.

Příklad

$\int \frac{4x+5}{2x^2+5x-7}\,\mathrm{d}\,x$ jako substituci zvolíme celého jmenovatele: $\begin{matrix} 2x^2+5x-7=t \\ 4x+5\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t \end{matrix}$

Dosadíme:

$$\int \frac{\mathrm{d}\,t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|2x^2+5x-7\right| + C$$

5. Integrály typu $\int xf(x^2)\,\mathrm{d}\,x$

Pokud máme v integrálu všude místo x výraz x^2 a tyto funkce jsou vynásobené ještě jedním x, použijeme substituce $x^2 = t$, $2x\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$. Můžeme si dodefinovat ještě jeden vzorec platný pro tyto případy:

$\int x\,f(x^2)\,\mathrm{d}\,x$ substituce: $\begin{matrix} x^2=t \\ 2x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t \end{matrix}$

Dosadíme:

$$\int \frac{1}{2} f(t)\,\mathrm{d}\,t.$$

Příklad:

$\int \frac{x}{\cos^2 x^2}\,\mathrm{d}\,x$ substituce: $\begin{matrix} x^2=t \\ 2x\,\mathrm{d}\,x=\mathrm{d}\,t \end{matrix}$

Dosadíme:

$$\int \frac{1}{2\cos^2 t}\,\mathrm{d}\,t = \frac{1}{2}\operatorname{tg} t + C = \frac{1}{2}\operatorname{tg} x^2 + C$$

4.3 Metoda per partes

Máme-li dvě spojité funkce u, v na intervalu I a mají-li v něm spojité první derivace, potom můžeme použít vzorec:

$$\int u v' \,\mathrm{d}x = uv - \int u' v \,\mathrm{d}x$$

Musíme si vždy správně uvědomit, kterou funkci použijeme jako u a kterou jako v. V některých případech je nutné použít toto pravidlo vícekrát.

Poznámka: Pomocí tohoto vzorce integrujeme funkce po částech. Odtud název per partes.

4.3.1 Řešené příklady na per partes

Nyní si pro představu ukážeme několik příkladů a jak se pomocí této metody počítají.

1. $\int 3x\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$

Derivace exponenciální funkce by nám nepomohla, budeme derivovat funkci $3x$:

$$\begin{array}{ll} u=3x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=3 & v=\mathrm{e}^x \end{array} = 3x\mathrm{e}^x - \int 3\mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = 3x\mathrm{e}^x - 3\mathrm{e}^x + C$$

2. $\int x \ln x \,\mathrm{d}x$

Nabízí se derivace funkce x, ale musíme derivovat logaritmus, protože neznáme vzorec na integraci logaritmické funkce:

$$\begin{array}{ll} u=\ln x & v'=x \\ u'=\frac{1}{x} & v=\frac{x^2}{2} \end{array} = \ln x \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{1}{x} \cdot \frac{x^2}{2} \,\mathrm{d}x = \ln x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \int x \,\mathrm{d}x =$$

$$\ln x \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + C = \ln x \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} + C$$

Poznámka: Když určujeme, kterou funkci budeme derivovat a kterou integrovat, musíme si vždy nejprve uvědomit, jestli jsou obě funkce integrovatelné.

3. $\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x$

V tomto případě je jedno, kterou funkci si zvolíme jako u a kterou jako v, ale z důvodu praktičnosti z hlediska znamének, budeme integrovat cos x a derivovat sin x :

$$\begin{array}{ll} u=\sin x & v'=\cos x \\ u'=\cos x & v=\sin x \end{array}$$

Příklad budeme řešit jako rovnici a zapíšeme si ji pod sebe.

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x=\sin x \sin x-\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x$$
$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x=\sin^2 x-\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x$$
$$2\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x=\sin^2 x$$
$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}\, x=\frac{\sin^2 x}{2}$$

Poznámka: Jelikož jsme na obou stranách měli stejný integrál, mohli jsme jej přičíst a díky tomu jsme získali výsledek. Těchto typů příkladů je více, například:

$\int \cos^2 x \, \mathrm{d}\, x, \int \mathrm{e}^x \sin x \, \mathrm{d}\, x, \ldots$

4. $\int x^2 \sin x \, \mathrm{d}\, x$

Integrál podobný příkladu 1.

Derivace $\sin x$ by nám nepomohla, budeme derivovat x^2:

$$\begin{array}{ll} u=x^2 & v'=\sin x \\ u'=2x & v=-\cos x \end{array} \quad = \quad -\cos x \cdot x^2-\int 2x \cdot (-\cos x) \, \mathrm{d}\, x$$

V tomto případě nám nastala situace, kdy musíme použít znovu per partes:

$$\begin{array}{ll} u=2x & v'=\cos x \\ u'=2 & v=\sin x \end{array}$$

$$-\cos x \cdot x^2+2x \sin x-\int 2 \sin x \, \mathrm{d}\, x=-\cos x \cdot x^2+2x \sin x+2\cos x+C$$

4.4 Určitý integrál

Nechť funkce f je omezená na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Pak lze definovat tzv. Riemannův integrál:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Věta Newtonova-Leibnizova [2 s. 100]**:**

Nechť f je integrovatelná v $\langle a, b\rangle$, nechť F je primitivní funkcí k funkci f v $\langle a, b\rangle$. Pak platí :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Poznámka: U určité integrálu nepočítáme s integrační konstantou, protože při dosazení do Newton-Leibnizovy věty se konstanty odečtou.

4.4.1 Některé vlastnosti integrálního počtu:

1. Existují-li dva integrály

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x, a<c<b$$

existuje také integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

pro který platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad .$$

2. Pokud máme stejné meze, určitý integrál je roven nule:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

3. Další vlastnost je tzv. linearita vzhledem k integrandu: Existují-li dva integrály

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad a < b$$

a C_1, C_2 *jsou* reálná čísla, existuje integrál

$$\int_a^b (C_1 f(x) + C_2 g(x))\,\mathrm{d}x$$

pro který platí

$$\int_a^b (C_1 f(x) + C_2 g(x))\,\mathrm{d}x = C_1 \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + C_2 \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Příklad: Pro názornější představu si spočítáme jednoduchý příklad:

$$\int_3^7 x\,\mathrm{d}x$$

Nejprve tento integrál zintegrujeme, vložíme do hranatých závorek, ke kterým připíšeme příslušné meze (interval):

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_3^7$$

Dosadíme nejprve horní mez (7) a od této hodnoty odečteme dolní mez (3).

$$\frac{7^2}{2} - \frac{3^2}{2} = \frac{49}{2} - \frac{9}{2} = 20$$

4.4.2 Substituční metoda pro určitý integrál

Nechť *f* je spojitá funkce na intervalu $\langle a, b\rangle$, g spojitá funkce na intervalu $\langle c, d\rangle$. Jestliže $g(c)=a, g(d)=b$ a $g(t)\in\langle a,b\rangle, \forall t\in\langle c,d\rangle$ platí:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Při výpočtu už se potom nemusíme zpět vracet k původní proměnné. Při výpočtu mezí se stanovují nové meze pro novou proměnnou.

Příklad:

$$\int_6^9 \frac{\mathrm{d}x}{(x-3)^2+1}$$

Substituce: $\begin{array}{l} x-3=t \\ \mathrm{d}x=\mathrm{d}t \end{array}$

Za *x* si dosadíme meze a spočítáme si nové a dosadíme si zároveň substituci:

$$\int_3^6 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \quad = \quad [\operatorname{arctg} t]_3^6=\operatorname{arctg}6-\operatorname{arctg}3$$

4.4.3 Per partes pro určitý integrál

Existují-li funkce *u*, *v* definované na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ a mají-li na tomto intervalu spojité první derivace, pak platí:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad:

$$\int_2^5 x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \quad = \quad \begin{array}{ll} u=x & v'=\mathrm{e}^x \\ u'=1 & v=\mathrm{e}^x \end{array} \quad =$$

$$[x\,\mathrm{e}^x]_2^5-\int_2^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=[x\,\mathrm{e}^x]_2^5-[\mathrm{e}^x]_2^5=5\,\mathrm{e}^5-2\,\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^5+\mathrm{e}^2=4\,\mathrm{e}^5-\mathrm{e}^2$$

4.5 Nevlastní integrál

4.5.1 Nevlastní integrály vlivem meze:

Jedná se o integrály, kde integrační interval není konečný, případně funkce není ohraničená.

Definice [2 s. 106]**:**

Nechť je funkce *f* definovaná na intervalu $\langle a, +\infty \rangle$, nechť pro každé $c > a$ existuje Riemannův integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$. Nechť existuje vlastní limita $\lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pak říkáme, že nevlastní integrál vlivem meze $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ je konvergentní a vztahem

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$$

definujeme jeho hodnotu. Jestliže limita neexistuje nebo je nekonečná, pak říkáme, že nevlastní integrál vlivem meze je divergentní.

Příklad:

$$\int_3^{\infty} -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{x}\right]_3^{\infty}$$

Pokud bychom teď dosadili, dostali bychom $\frac{1}{\infty} - \frac{1}{3}$ a to nelze spočítat. Takže budeme muset použít pro tento příklad limitu, integrál si tedy upravíme následovně:

$$\lim_{c \to \infty} \int_3^c -\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{c \to \infty} \left[\frac{1}{x}\right]_3^{\infty} = \lim_{c \to \infty} \left(\frac{1}{\infty}\right) - \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} \quad .$$

Tento integrál je konvergentní.

4.6 Geometrické aplikace

4.6.1 Obsah rovinných útvarů

1. Nechť funkce f je spojitá a nezáporná na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Plocha omezená funkcí f, přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x je rovna

$$S = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

2. Nechť je funkce f spojitá a platí $f \leq 0\ \forall\ x \in \langle a, b \rangle$. Plocha omezená přímkami $x = a$, $x = b$ a osou x je rovna

$$S = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x.$$

3. Nechť funkce f, g jsou spojité na $\langle a, b \rangle$. Plocha $\forall\ x \in \langle a, b \rangle$ je $g(x) \leq f(x)$ omezená přímkami $x = a$, $x = b$ je rovna

$$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}\,x$$

Problém může nastat u symetrických obrazců. V případě, že obsah vyjde nulový, je nutné plochu rozdělit na menší nesymetrické částí a poté to pouze vynásobit počtem částí.

Příklad:

Vypočítáme plošný obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami $y=3x-x^2, y=x$.

Řešení:

Nejprve nalezneme průsečíky. Ty určíme z rovnice:

$$\begin{array}{l} 3x-x^2=x \\ \text{upravíme} \\ 2x-x^2=0 \\ x(2-x)=0 \end{array} \quad \text{odtud} \quad x_1=0, x_2=2 \quad .$$

Plošný obsah P je dán hodnotou integrálu:

$$P=\int_0^2 (-x^2+3x-x)\,\mathrm{d}x$$

Vypočítáme:

$$P=\int_0^2 -x^2+2x\,\mathrm{d}x=\left[\frac{-x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{-(2)^3}{3}+2^2=\frac{-8}{3}+4=\frac{4}{3}$$

Poznámka:

Pokud bychom při výpočtu plochy použili jednotky, jednalo by se o jednotky čtverečné.

4.6.2 Objem rotačního tělesa

Nechť funkce f je spojitá na uzavřeném intervalu $\langle a, b \rangle.$ a funkce f rotuje okolo x je dána hodnotou:

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Příklad:

Vypočítáme objem tělesa, které vznikne otáčením křivky $y=3x$ na uzavřeném intervalu $\langle 0,4 \rangle$

Řešení:

a) funkce $y=3x$ rotuje okolo x

$$V=\pi\int_0^4 3x\,\mathrm{d}x=\pi\left[3\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\pi 3\frac{4^2}{2}=24\,\pi$$

b) funkce $y=3x$ rotuje okolo y

Postup: Prohodíme proměnné x a y a přepočítáme interval přes dosazení. Poté použijeme stejný vzorec jako předtím:

Funkce: $\begin{array}{c} x=3y \\ y=\dfrac{x}{3} \end{array}$

Interval: $\begin{array}{c} \langle 3\cdot 0, 3\cdot 4 \rangle \\ \langle 0,12 \rangle \end{array}$

$$V=\pi\int_0^{12}\frac{x}{3}\,\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{x^2}{6}\right]_0^{12}=24\,\pi$$

Poznámka:

Pokud bychom při výpočtu plochy použili jednotky, jednalo by se o jednotky krychlové.

5 Ekonomické aplikace Riemannova integrálu

V kapitole 2 jsme si ukazovali, jak pomocí například celkových nákladů získáme mezní náklady. Pomocí integrálů můžeme tento postup obrátit a z mezních veličin získat celkové náklady. Pro postup opět využijeme vzorce z tabulky 2. Ty zintegrujeme podle proměnné Q a vyjádříme si zadanou veličinu.

Tyto funkce můžeme počítat obecně, nebo v nějakém časovém období. V takovém případě použijeme určitý nebo nevlastní integrál.

5.1 Celkové náklady

Celkové náklady získáme integrací vztahu pro mezní náklady (viz kapitola 2.2).

$$MC(Q) = (TC)'(Q)$$

Zintegrujeme podle proměnné *Q:*

$$\int MC(Q)\,\mathrm{d}Q = TC(Q)$$

Vyjádříme $TC(Q)$:

$$TC(Q) = \int MC(Q)\,\mathrm{d}Q$$

Příklad:

Náklady firmy jsou dány funkcí $MC(Q) = 2Q^2 - 7Q + 20$. Firma běžně vyprodukuje 7 jednotek denně. Určete dodatečné náklady, pokud se firma rozhodne denní produkci zvýšit o 3 jednotky.

Řešení:

$$TC(Q) = \int_7^{10} (2Q^2 - 7Q + 20)\,\mathrm{d}Q$$

Zintegrujeme:

$$TC(Q) = \left[2\frac{Q^3}{3} - 7\frac{Q^2}{2} + 20Q \right]_7^{10}$$

Dosadíme meze:

$$TC(Q) = \frac{2}{3}10^3 - \frac{7}{2}10^2 + 20\cdot 10 - \frac{2}{3}7^3 + \frac{7}{2}7^2 - 20\cdot 7$$

Výsledek:

$$TC(Q) = 319{,}5$$

Celkové náklady činí 319,5 jednotek.

5.2 Celkový užitek

Celkový užitek, stejně jako celkové náklady, můžeme vyjádřit pomocí vztahu pro mezní užitek (tab. 2). Vyjádření je stejné jako v kapitole 5.1.

Celkový užitek tedy vyjádříme vztahem:

$$TU(Q)=\int MU(Q)\,\mathrm{d}\,Q$$

Příklad:

Vypočtěme celkový užitek firmy, jestliže víme, že mezní užitek je dán funkcí $MU(Q)=3\mathrm{Q}^2-Q$.

Řešení:

$$MU(Q)=\int(3\mathrm{Q}^2-Q)\,\mathrm{d}\,Q$$

Rozdělíme na dva integrály:

$$MU(Q)=\int 3\mathrm{Q}^2\,\mathrm{d}\,Q-\int Q\,\mathrm{d}\,Q$$

Zintegrujeme:

$$MU(Q)=\frac{3\mathrm{Q}^3}{3}-\frac{Q^2}{2}+C=Q^3-\frac{Q^2}{2}+C$$

Dosadíme pro Q = 10:

$$10^3-\frac{10^2}{2}=1000-\frac{100}{2}=950$$

Celkový užitek činí 950 jednotek.

5.3 Celkový příjem

Příklad:

Vypočteme celkový příjem za období od druhého do pátého roku. Výška renty je dána funkcí $f(t)=25000\,\mathrm{e}^{-t}$, kde symbolem t označujeme roky.

Řešení:

$$TR=\int_{2}^{5}\left(25000\,\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t$$

$$TR=\left[-25000\,\mathrm{e}^{-t}\right]_{2}^{5}$$

$$TR=-25000\,\mathrm{e}^{-5}+25000\,\mathrm{e}^{-2}$$

$$TR=3\,215$$

Celkový příjem mezi druhým a pátým rokem je 3 215 jednotek.

5.3.1 Nevlastní integrál

Příklad:

Vypočteme celkový příjem za období $\langle 1,\infty\rangle$, je-li výška renty v čase t dána funkcí

$$f(t)=\frac{1}{(4+t^2)}\quad .$$

Řešení:

$$TR=\int_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{(4+t)^2}\right)\mathrm{d}t$$

Pro výpočet použijeme substituci $\begin{array}{c}4+t=u\\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}u\end{array}$ a přepočítáme meze:

$$TR=\int_{5}^{\infty}\left(\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u$$

Dosadíme meze a dopočítáme:

$$\left[\frac{-1}{u}\right]_{5}^{\infty}=\lim_{u\to\infty}\left(\frac{-1}{u}\right)-\left(\frac{-1}{5}\right)=1/5$$

Celkový příjem je 1/5 jednotek.

5.4 Přebytek spotřebitele a přebytek výrobce

Pro výpočet přebytku spotřebitele a výrobce je velice důležitý rovnovážný bod, který popisuje tržní rovnováhu. Nechť $D(p)$ je **poptávková funkce** a $S(p)$ **funkce nabídková**. Průsečík těchto funkcí je již zmiňovaný **rovnovážný bod** $[P_E, Q_E]$.

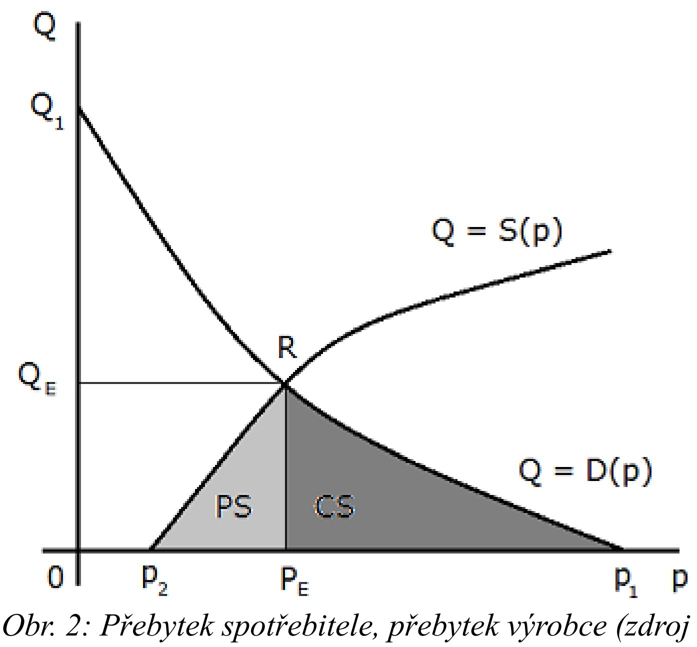
Může dojít k tzv. **spotřebitelskému přebytku** v případě, že spotřebitel koupí výrobek za vyšší cenu než zadaná cena p_E. Je dán vzorcem:

$$CS = \int_{p_E}^{p_1} D(p)\,\mathrm{d}\,p$$

Případně může existovat výrobce, který bude prodávat výrobky za nižší cenu, než je p_E. Tím dojde k **přebytku výrobce**. Je dán vzorcem:

$$PS = \int_{p_2}^{p_E} S(p)\,\mathrm{d}\,p$$

Názorněji si to můžeme ukázat na obr. 2, kde vyšrafované plochy označují přebytek spotřebitele (CS) a přebytek výrobce (PS). Rovnovážný bod je zde označen písmenem R. (Jedná se o geometrické vyjádření.)



Obr. 2: Přebytek spotřebitele, přebytek výrobce (zdroj vlastní)

Příklad:

Vypočteme přebytek spotřebitele a přebytek výrobce, jestliže na uzavřeném intervalu $\langle 1,2 \rangle$ máme dány funkce:

- poptávková: $D(p) = p^2 - 6p + 8$

- nabídková: $S(p) = p^2 + 2p - 3$

Řešení:

Nalezneme rovnovážný bod řešením rovnice $D(p) = S(p)$:

$$p^2 - 6p + 8 = p^2 + 2p - 3$$

$$8p = 11$$

$$p = \frac{11}{8}$$

Výsledek dosadíme do libovolné rovnice a spočítáme druhou souřadnici bodu:

$$q = \left(\frac{11}{8}\right)^2 - 6\left(\frac{11}{8}\right) + 8 \qquad q = \frac{105}{64}$$

Rovnovážný bod má souřadnice: $\left[\frac{11}{8}, \frac{105}{64}\right]$

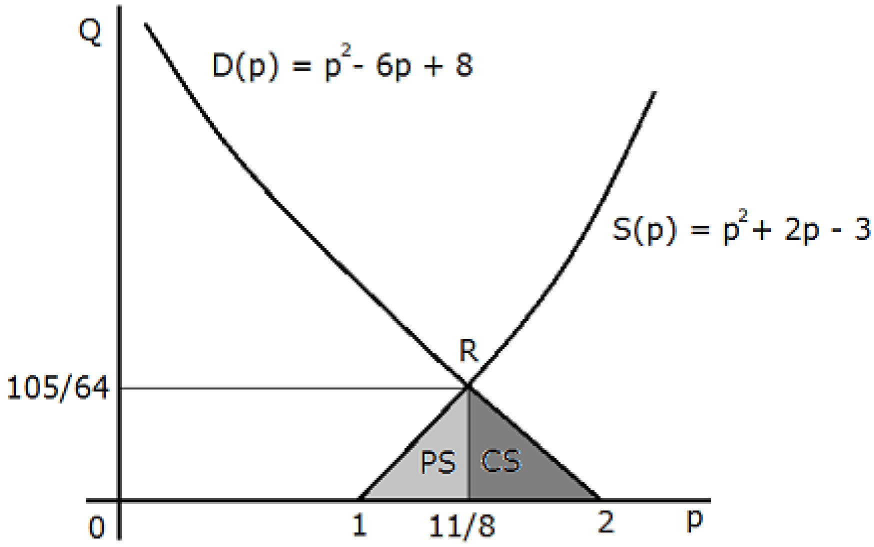
V případě, že bychom neměli zadaný interval, na kterém budeme přebytky počítat, museli bychom tyto hodnoty spočítat jako průsečíky funkcí s osou p.

V tomto příkladě by to vypadalo následovně:

$$p^2 - 6p + 8 = 0 \qquad \begin{matrix} p_1 = 2 \\ p_2 = 4 \end{matrix}$$

$$p^2 + 2p - 3 = 0 \qquad \begin{matrix} p_1 = -3 \\ p_2 = 1 \end{matrix}$$

Pro lepší orientaci si vše zakreslíme do obr. 3:



Obr. 3: Příklad: přebytek spotřebitele, přebytek výrobce (zdroj vlastni)

Pro přebytek výrobce platí (viz obr. 3):

$$PS=\int_{1}^{\frac{11}{8}}(p^2+2p-3)\,\mathrm{d}\,p$$

$$PS=\left[\frac{p^3}{3}+2\frac{p^2}{2}-3p\right]_{1}^{\frac{11}{8}}$$

$$PS=0{,}3$$

Pro přebytek spotřebitele platí (viz obr. 3):

$$CS=\int_{\frac{11}{8}}^{2}(p^2-6p+8)\,\mathrm{d}\,p$$

$$CS=\left[\frac{p^3}{3}-6\frac{p^2}{2}+8p\right]_{\frac{11}{8}}^{2}$$

$$CS=0{,}5$$

Přebytek výrobce je 0,3 jednotek a přebytek spotřebitele 0,5 jednotek.

5.5 Zásoba na skladě

Nechť je dána funkce, která popisuje zásobu na skladě. Můžeme nalézt průměrnou zásobu pomocí tzv. průměrné hodnoty.

Příklad:

Máme zadanou funkci $f(x)=1000-3t$ popisující zásobu na skladě a čas $t \in \langle 0{,}10 \rangle$. Jaká je průměrná zásoba na skladě?

Řešení:

K řešení si dodefinujeme vzorec pro průměrnou hodnotu:

$$Z=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Za a a b dosadíme hodnoty pro t :

$$Z=\frac{1}{(10-0)}\int_0^{10}(1000-3t)\,\mathrm{d}\,t$$

$$Z=\frac{1}{10}[1000t-1{,}5t^2]_0^{10}$$

$$Z=850$$

Průměrná zásoba na skladě činí 850 jednotek.

5.6 Procvičování

1) Vypočtěte celkový příjem za období od čtvrtého do jedenáctého roku, je-li výška renty v čase t dána funkcí $f(t)=\frac{2300}{\sqrt{12+t}}$, kde symbolem t označujeme roky.

2) Jaký je přebytek spotřebitele a přebytek výrobce, jestliže na uzavřeném intervalu $\langle 2,4 \rangle$ máme definovány funkce $S(p)=p^2+2p-8$, $D(p)=p^2-10p+24$?

3) Jaká je průměrná zásoba na skladě, jestliže funkce $f(x)=t^3-\sqrt{(t-3)}$ definuje zásobu na skladě pro $t \in \langle 8,11 \rangle$?

Výsledky:

1) $TR=46,3$

2) $R\left[\frac{8}{3},\frac{40}{9}\right]$, $PS=1,43$, $CS=2,57$

3) $Z=876$

6 Závěr

Cílem této práce bylo ukázat vztah matematiky a ekonomie. Musím říct, že já jako studentka matematiky jsem byla až překvapena, jaké využití mohou mít jak derivace, tak integrály. Z toho důvodu jsem zkusila zjistit i názor několika studentů ekonomie. Výsledkem bylo podobné zjištění. Studenti většinou odpověděli, že se museli kdysi derivace i integrály naučit, ale nikdy netušili, k čemu jim to vlastně bude.

V některých ekonomických učebnicích nejsou z matematického hlediska přesné formulace definic základních ekonomických pojmů, neboť často nerozlišují diskrétní a spojité situace. V některých učebnicích nebylo pořádně vysvětleno, co se z matematického hlediska dělá. Pro představu - podobný příklad jako je v kapitole 5.4 byl vysvětlen jen na jednom příkladu a bylo zadáno vše včetně mezí a průsečíku, takže v případě, že by student dostal jiné hodnoty a některá z těchto částí (například průsečík) mu chyběla, s úkolem by si pravděpodobně neporadil.

Co se týče využitelnosti této práce, myslím si, že by se dala využít jak v ekonomii, tak v matematice. Určitě nejsem jediná, kdo se občas ptá: „A k čemu mi to bude?" Navíc v případě složitější látky si myslím, že je daleko více zapotřebí mít i názornou ukázku využitelnosti v praxi.

7 Zdroje

[1] BITTNEROVÁ, D., PLAČKOVÁ, G. *Louskáček 1.* 1. vyd. Liberec: TUL, 2006. ISBN 80-7083-984-8.

[2] BITTNEROVÁ, D., PLAČKOVÁ, G. *Louskáček 2.* 2. vyd. Liberec: TUL, 2009. ISBN 978-80-7372-531-0.

[3] KAVECKÝ, P. *Derivace funkce.* In: *Derivace* [online]. 26. 5. 2008 [vid. 8. 4. 2012]. Dostupné z:

http://ftp.mgo.opava.cz/kav/download/matematika/seminar/derivace/derivace_scio/MaSS_Zdroj12-2_derivace_funkce.htm

[4] MACÁKOVÁ, L. a kol. *Mikroekonomie.* 8. vyd. Praha: Melandrium, 2003. ISBN 80-86175-38-3.

[5] SAMUELSON, P. A. a NORDHAUS, W. D. *Ekonomie.* 13. vyd. Praha: Nakladatelství Svoboda, 1995. ISBN 80-205-0494-X.

[6] REKTORYS, Karel. *Přehled užité matematiky 2.* 7. vyd. Praha: Prometheus, 2000. ISBN 80-7196-181-7.

[7] HENZLER, J. - KAŇKA, M. *Matematika 2.* 1. vyd. Praha: Ekopress, s.r.o., 2003. ISBN 80-86119-77-7.

[8] SOUKUPOVÁ, J. A kol. *Mikroekonomie.* 4.vyd. Praha: Management Press, 2006. ISBN 978-80-7261-150-8.

[9] COLANDER, D. C. *Microeconomics.* 1 vyd. Homewood: Irwin, 1993.

ISBN 0-256-10784-X

[10] COUGHLIN, R. F. - ZITARELLI, D. E. *Calculus with Applications.* 2 vyd. USA: Sounders College Publishing, 1993.

[11] HENZLER, J. - KAŇKA, M. *Matematika pro ekonomy.* 1. vyd. Praha: Ekopress, s.r.o., 1997. ISBN 80-86119-01-7.